

Das Haus vom Nikolaus oder das Königsberger Brückenproblem

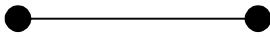
Unterrichtsskizze

Die Graphentheorie ist ein relativ junges Gebiet der Mathematik, welches die Aufgabe hat, Verbindungen zwischen Punkten zu optimieren. Dafür gibt es eine Menge realitätsbezogener Anwendungen wie Optimierung von U-Bahn-Netzen, kostengünstiges Verlegen von Leitungsnetzen u.v.a.m.

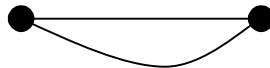
Theoretische Grundlagen

Man unterscheidet zwischen **Knoten oder Ecken** und **Kanten**. Knoten sind Orte und Kanten sind Verbindungen zwischen diesen Orten. Ein Netz aus Knoten und Kanten nennt man einen **Graph** (nicht zu verwechseln mit dem Graph aus der Analysis). Knoten können als Punkte gezeichnet werden, Kanten als Linien oder Kurven.

Beispiel:



2 Knoten und eine Kante

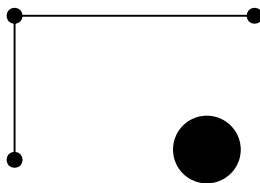


2 Knoten mit 2 Kanten

D.h. von einem Knoten können auch mehrere Kanten ausgehen, die Kanten können auch nicht linear gezeichnet werden.

Bei Graphen können müssen nicht zwangsläufig Knoten mit Kanten verbunden sein.

Beispiel:



Graph mit 4 Knoten und 2 Kanten

Der erste, der sich mit Fragen der Graphentheorie beschäftigt hat, ohne sie jedoch als Theorie zu bezeichnen war **Leonard Euler** (1707-1783).

Er entdeckte die wesentlichen Merkmale, die der Graphentheorie zugrunde liegen. Wir wollen die grundlegenden Merkmale der eulerschen Erkenntnisse entwickeln.

Aufgabe: Zeichne sämtliche Graphen, die vier Knoten haben. Wie viele gibt es?

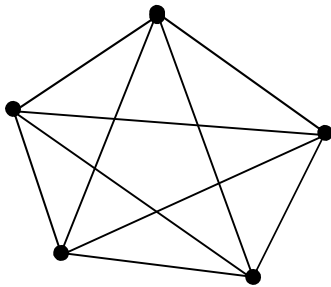
Antwort: Es gibt zwölf Graphen:

- Davon 1 ohne Kanten
- 1 mit einer Kante
- 2 mit zwei Kanten
- 3 mit drei Kanten
- 3 mit vier Kanten
- 1 mit fünf Kanten
- 1 mit sechs Kanten

Ein Graph, der sich ohne abzusetzen in einem Zug zeichnen lässt heißt **eulerscher Graph**. Ein Graph, der sich in einem Zug zeichnen lässt und bei dem der Startknoten gleich dem Endknoten ist, heißt **eulerscher Kreis**.

Welcher der gezeichneten Graphen mit vier Knoten sind eulersch, welche sind eulersche Kreise?

Aufgabe: Zeichne einen Graphen mit 5 Knoten so, dass er **eulersch** ist.
Wie viele Kanten hat dieser Graph?



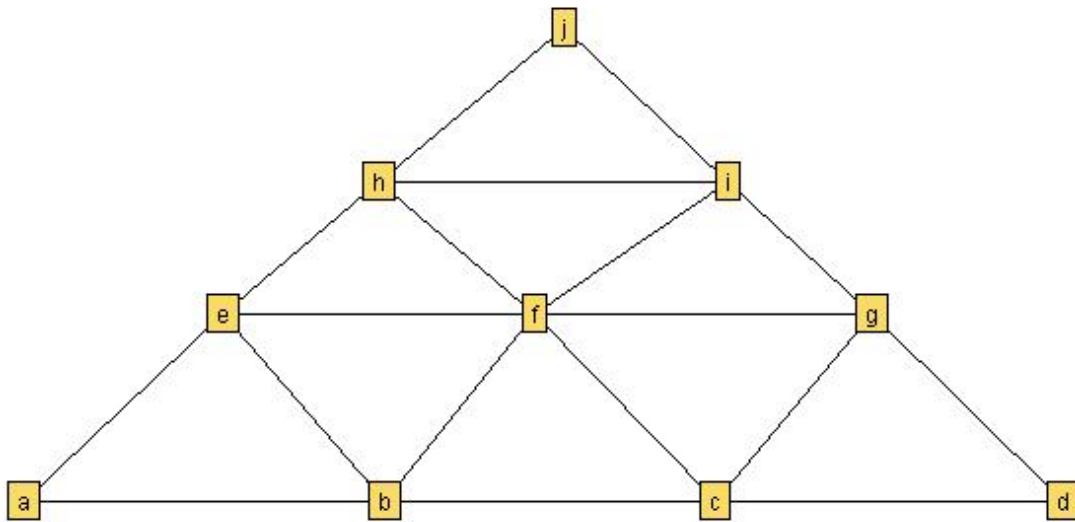
Wir bezeichnen die Anzahl der Knoten mit K . Hier ist $K = 5$.
Von jedem Knoten können 4 Kanten ausgehen, um die anderen Knoten zu verbinden.
Die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen, bezeichnet man als **Grad** mit dem Buchstaben n .
Hier ist $n = 4$.

Die Gesamtzahl n_g der möglichen Kanten berechnet man mit der Formel:

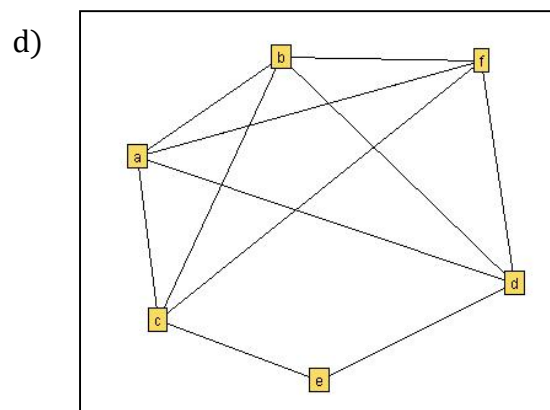
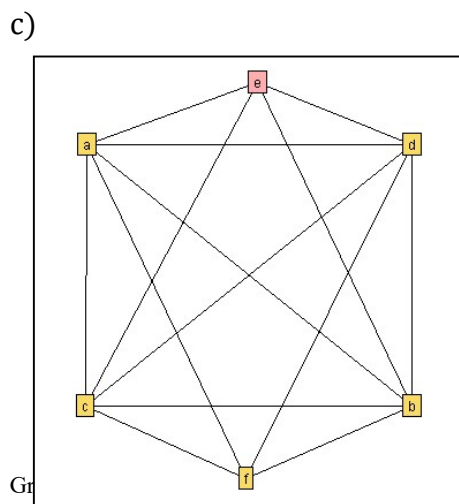
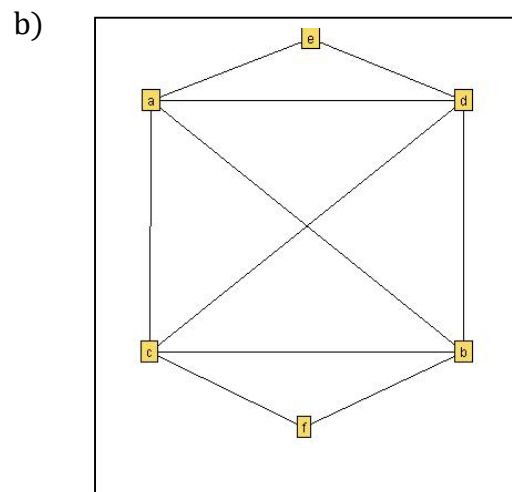
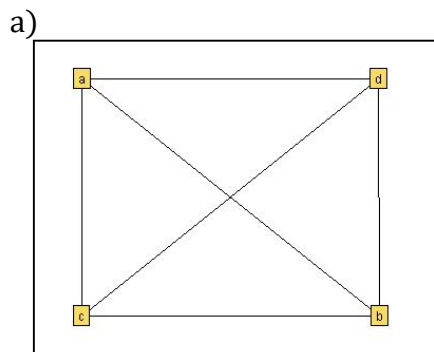
$$n_g = K * n / 2 = 10.$$

Aufgaben:

1. Berechne die maximale Anzahl der Kanten eines Graphen mit 3, 4, 6, 7, 10 und 12 Knoten.
2. Versuche einen Kantenzug zu finden, der alle eingezeichneten Kanten enthält, ohne eine Kante doppelt zu verwenden.



3. Welche der dargestellten Graphen sind eulersche Graphen, eulersche Kreise oder nicht eulersch?

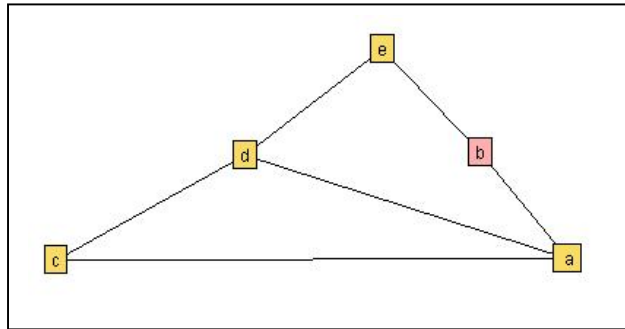


Nach weiteren Beispielen soll herausgearbeitet werden, wodurch sich ein eulerscher Graph bzw. ein eulerscher Kreis auszeichnet.

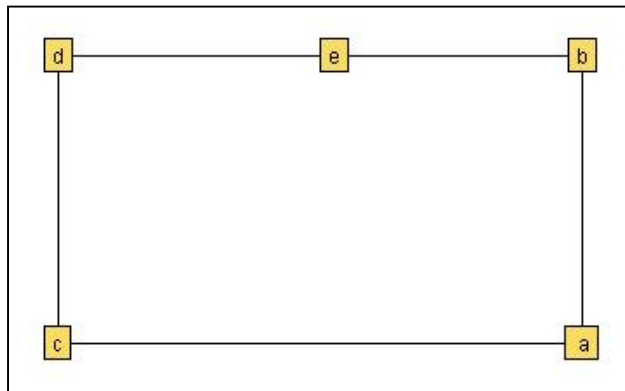
Ein **Eulerscher Graph** liegt vor, wenn nur Anfangs- und Endknoten einen **ungeraden Grad** haben und die anderen Knoten einen **geraden Grad**.

Ein **Eulerscher Kreis** liegt vor, wenn alle Knoten einen **geraden Grad** haben.

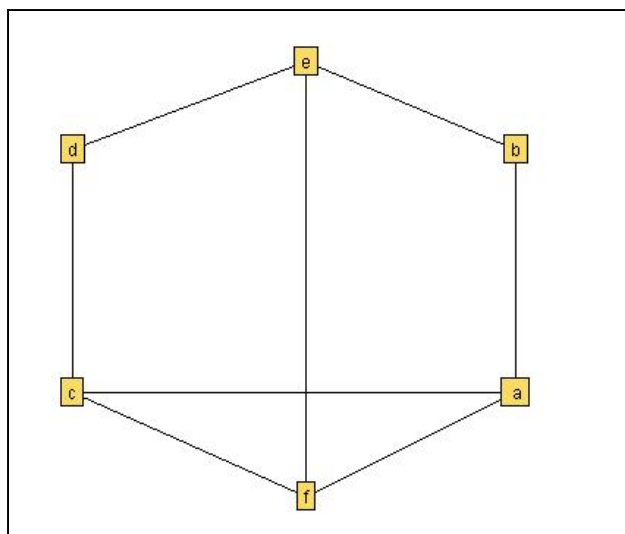
Beispiel: Der dargestellte Graph kann eulersch sein, wenn man a und d als Start- und Endknoten nimmt.



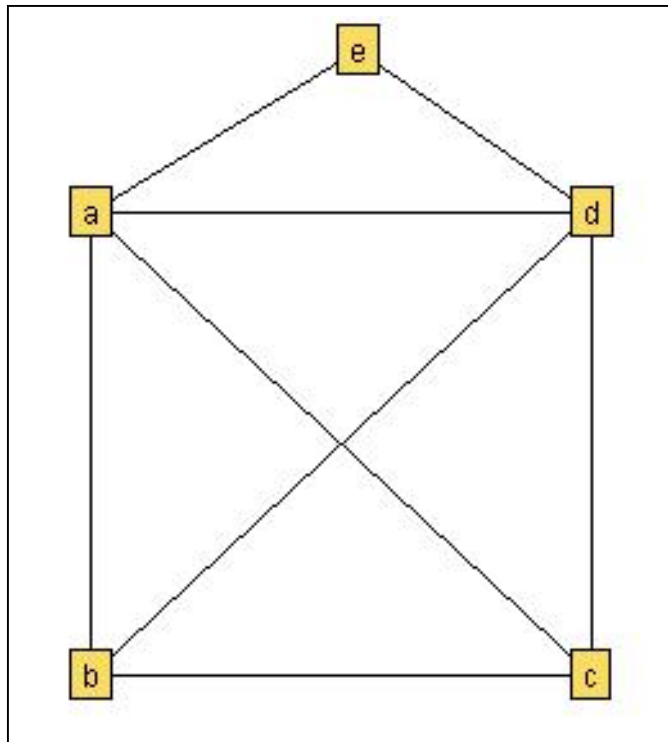
Beispiel: Der dargestellte Graph ist ein eulerscher Kreis, da alle Knoten den Grad 2 haben.



Beispiel: Der dargestellte Graph kann nicht eulersch sein, da es vier Knoten gibt, die den Grad 3 haben.



Das Haus vom Nikolaus



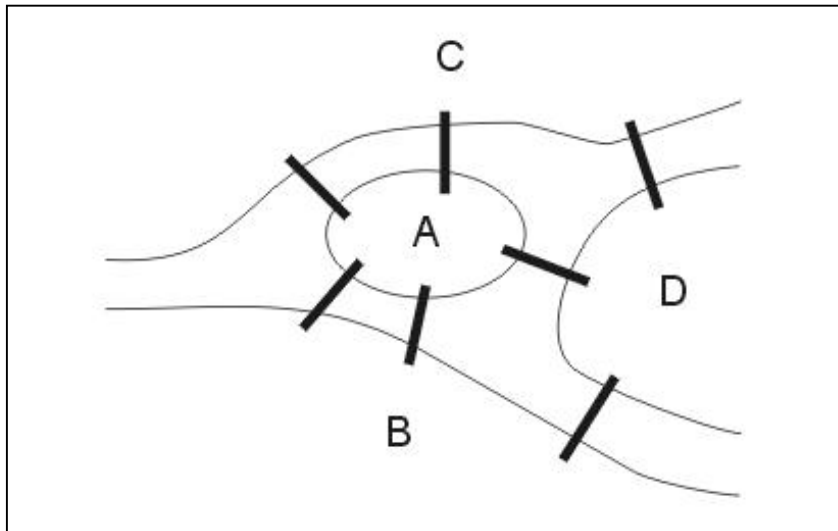
Wie kann man das Haus vom Nikolaus zeichnen?
Handelt es sich um einen eulerschen Graphen oder einen eulerschen Kreis?
Bei welchem Knoten muss man beginnen?

Begründe die Entscheidungen.

Das Königsberger Brückenproblem

Zur Zeit von Leonard Euler verlief in der Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) ein Fluss so, dass er zwei Inseln umfloss. Von beiden Seiten des Flusses gab es vier bzw. 2 Brücken auf die Inseln. Außerdem waren die Inseln untereinander durch eine Brücke verbunden. Insgesamt gab es also sieben Brücken.

Die Königsberger wollten nun wissen, ob sie einen Spaziergang durch die Stadt machen könnten, bei dem sie jede der sieben Brücken nur einmal benutzen müssen.



Leonard Euler löste das Problem mit Hilfe der Graphentheorie:

Aufgabe:

1. Zeichne einen Graphen, der die Situation darstellt. Dabei sind die Inseln und das Festland jeweils die Knoten, die Brücken die Kanten.
2. Beurteile das Problem anhand der festgestellten Regeln.