

## Vorbemerkungen

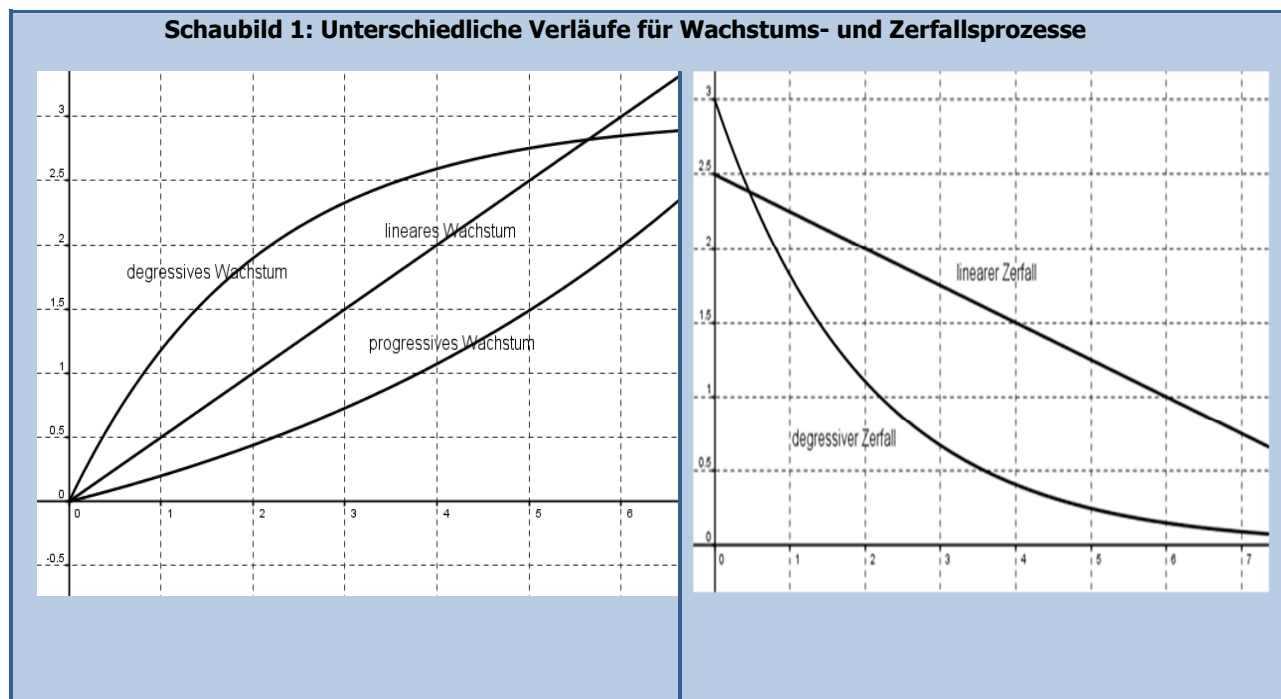
Das Thema Exponentialfunktionen ist ein eigenständiges Gebiet in der Mathematik und wird in der Schule in verschiedenen Stufen unterrichtet. Einfache Exponentialfunktionen (Kapitel 2.3.1) werden schon in der Mittelstufe behandelt. Hier beispielsweise im Zusammenhang mit der Zinseszinsrechnung. In der Klasse 11 der gymnasialen Oberstufe oder in der Klasse 12 der Fachoberschule werden zusätzlich die e-Funktionen behandelt (Kapitel 2.3.2). Die Weiterführung der e-Funktion im Zusammenhang mit anderen Wachstumsformen (Kapitel 3) wird dagegen meist nur in Leistungskursen der gymnasialen Oberstufe untersucht. Wachstumsgeschwindigkeiten, die sich aus der Ableitung von e-Funktionen ergeben gehören in das Gebiet der Differentialrechnung, werden dort aber ebenfalls meist nur in Leistungskursen gelehrt. In Verbindung mit den Ableitungen der e-Funktion stehen die Differentialgleichungen, die aber meist kein Schulstoff mehr sind, sondern Gegenstand der Ausbildung an der Universität. Dennoch bin ich der Meinung, dass derjenige, dessen Interesse einmal für die Besonderheit der Exponentialfunktionen geweckt ist, automatisch zu den weiterführenden Fragestellungen gelangt und diese auch mit einigem Fleiß verstehen kann.

## 1. Einleitung

Als **Wachstum** bezeichnet man die Zunahme einer Messgröße innerhalb eines bestimmten Zeitraums. Im mathematischen Sinne bedeutet dies, dass die Wachstumsgröße eine Funktion der Zeit ist. Als **Zerfall** bezeichnet man die Abnahme einer Messgröße innerhalb eines Zeitraums.

Wenn im Folgenden von Wachstum die Rede ist, ist der Zerfall gleichermaßen gemeint (negatives Wachstum).

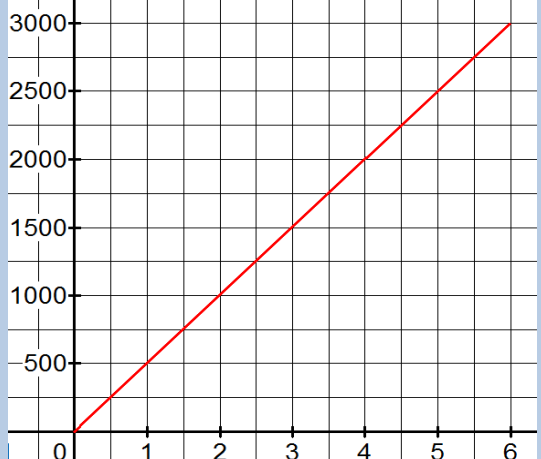
In der Mathematik werden Wachstumsprozesse graphisch durch steigende Graphen dargestellt. Diese können linear oder kurvenförmig verlaufen.



## 2. Mathematische Wachstumsmodelle

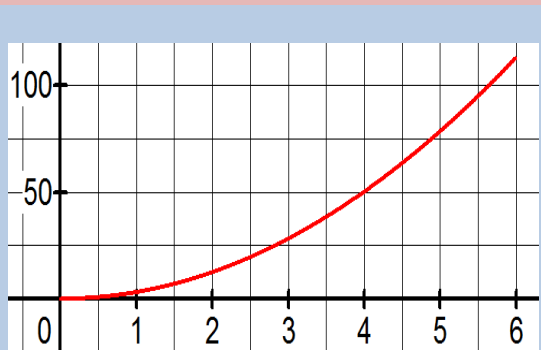
### 2.1 Lineares Wachstum

Beim linearen Wachstum verändert sich der Funktionswert pro Zeiteinheit jeweils um den gleichen Betrag.

Schaubild 2: lineares Wachstum	Beispiel:
	<p>Ein LKW liefert jeden Tag 500 Steine auf eine Baustelle.</p>
<p><u>Funktionsgleichung</u></p> $f(x) = 500 x$	<p><u>Erläuterung:</u> Der Funktionswert nach x Tagen berechnet sich aus der Multiplikation der täglichen Liefermenge mit der Zahl der Tage.</p>
<p><u>Allgemein</u></p> $f(x) = ax + b$	<p>a = Zunahme pro Zeiteinheit b = mögliche Anfangsmenge (im Beispiel ist b = 0)</p>

### 2.2 Potenzielles Wachstum

Wachstumsverläufe ergeben sich auch aus Potenzfunktionen. Diese sind aber eher ungeeignet, um Wachstumsprozesse im Zeitverlauf darzustellen, da der x-Wert meist eine Bestandsgröße ist.

Schaubild 3: Potenzielles Wachstum	Beispiel:
	<p>Die Fläche eines Kreises ergibt sich, indem man den Radius quadriert und mit der Zahl Pi multipliziert</p>
<p><u>Funktionsgleichung</u></p> $f(r) = \pi r^2$	<p><u>Erläuterung:</u> Der aktuelle Ausgangswert wird jeweils mit der gleichen Zahl potenziert.</p>





## 2.3 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum liegt vor, wenn der Bestand zum Zeitpunkt  $x$  jeweils mit demselben Faktor multipliziert wird.

### 2.3.1 Die einfache Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot b^x$

Allgemein:  $f(x) = a \cdot b^x$

wobei  $a = f(0)$ , d. h. der **Anfangswert** zum Zeitpunkt 0 und  $b$  der **Wachstums- oder Zerfallsfaktor** ist.

Es gilt: Wenn  $b > 1 \rightarrow$  **Wachstumsfunktion**, wenn  $b < 1 \rightarrow$  **Zerfallsfunktion**

#### Anwendungsgebiete:

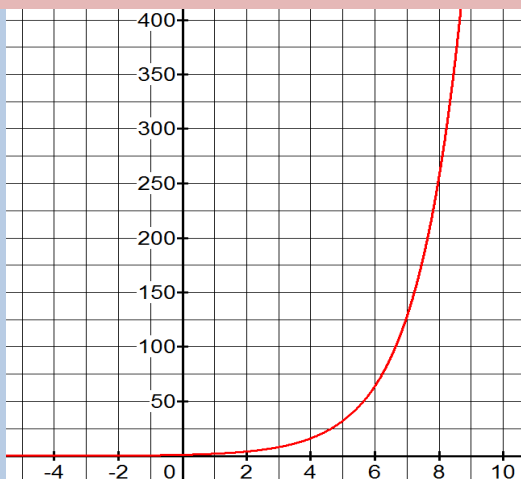
Exponentielle Wachstums- und Zerfallsvorgänge finden sich sehr häufig in der Biologie (Zellwachstum), Chemie (Zerfall von Radioaktivität), Wirtschaft (Verzinsung von Kapital) und vielen anderen Wissenschaften.

#### Das Wesen der Exponentialfunktionen:

Exponentielle Wachstumsvorgänge entwickeln eine Dynamik, wie sie durch keine anderen mathematischen Modelle beschrieben werden. Bereits kleine Anfangswerte entwickeln sich oft schon nach wenigen Perioden explosionsartig. Handelt es sich dabei um Vorgänge in Natur und Umwelt, so ist es wichtig, diese rechtzeitig zu erkennen, um eventuell geeignete Maßnahmen ergreifen zu können.

**Schaubild 3: Exponentielles Wachstum**

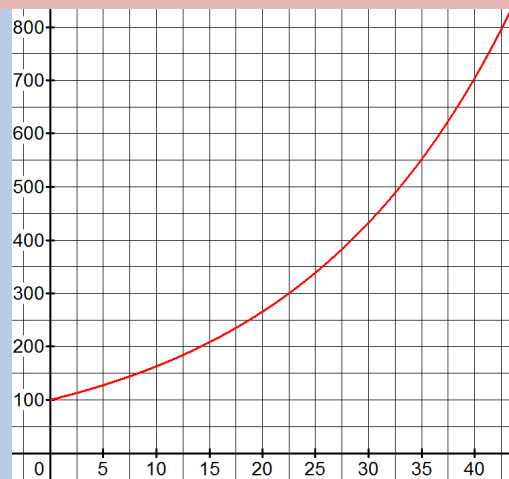
$$f(x) = 2^x$$



Der obige Graph beschreibt die Entwicklung der Potenzen der Zahl 2. Man erkennt am Verlauf des Graphen die Dynamik, die sich schon nach wenigen Perioden entwickelt. Die Millionengrenze ist bereits für  $x = 20$  überschritten.

**Schaubild 4: Exponentielles Wachstum**

$$f(x) = 100 \cdot 1,05^x$$

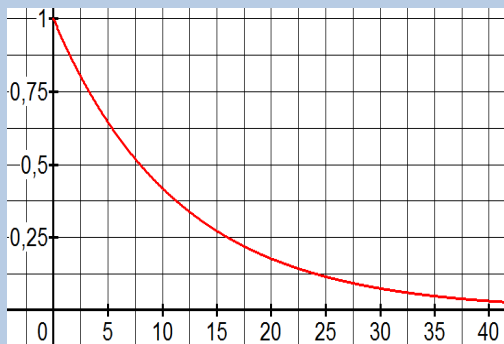


Der obige Graph beschreibt die Entwicklung eines Kapitals von 100 €, welches mit 5 % pro Jahr verzinst wird. Würde man die Entwicklung des Kapitals über 500 Jahre verfolgen, so würde man einen Endwert von ca. 4 Billionen € erreicht haben.



Schaubild 5: Exponentieller Zerfall

$$f(x) = 0.917^x$$



Der obige Graph beschreibt den Zerfall eines radioaktiven Elementes mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen.

Schaubild 6: Exponentieller Zerfall

$$f(x) = 5000 \cdot 0,8^x$$



Der obige Graph beschreibt die Wertentwicklung eines Gegenstandes mit einem Anschaffungswert von 5000 €, der mit 20 % pro Jahr abgeschrieben wird.

**Unterschied zum potenziellen Wachstum:** Beim potenziellen Wachstum wird der aktuelle x-Wert potenziert, beim exponentiellen Wachstum wird der vorhergehende Funktionswert mit einer Zahl multipliziert, um den aktuellen Funktionswert zu erhalten.

Potenzielles Wachstum	Exponentielles Wachstum
$f(x) = x^n$	$f(x) = B(x-1) \cdot b$ B(x) = Bestand zum Zeitpunkt x, b = Wachstumsfaktor

### 2.3.1.1 Berechnen der einzelnen Größen der einfachen Exponentialfunktion

<p><b>Berechnen des Funktionswertes</b> Ein Kapital von 1000 € wird mit 3 % verzinst. Auf welchen Betrag ist es nach 5 Jahren angewachsen?</p>	<p><math>a = 1000, b = 1,05, x = 5, f(x) = ?</math> <math>1000 \cdot 1,03^5 = f(x) \quad f(x) = 1159,27</math></p>
<p><b>Berechnen des Anfangswertes</b> Nach drei Jahren wurde ein Kredit einschließlich 5 % Zinsen mit 8682,19 € zurückgezahlt. Wie hoch war der Kredit?</p>	<p><math>a = ?, b = 1,05, x = 3, f(x) = 8682,19</math> <math>a \cdot 1,05^3 = 8682,19 \quad   : 1,05^3</math> <math>a = 7500 \text{ €}</math></p>
<p><b>Berechnen des Wachstumsfaktors</b> Eine Flüssigkeit kühlt sich innerhalb von 30 Minuten von 90 Grad auf 25 Grad ab. Berechne die Zerfallsrate pro Minute.</p>	<p><math>a = 90, b = ?, x = 30, f(x) = 25</math> <math>90 \cdot b^{30} = 25 \quad   \sqrt[30]{0.333}</math> <math>b = 0,964 \rightarrow 3,6 \text{ % pro Minute}</math></p>
<p><b>Berechnen der Zeit</b> Wie lange war ein Kredit über 3000 €, der mit 4,75% verzinst wurde, geliehen, wenn er mit 4348,64 € zurückgezahlt wurde?</p>	<p><math>a = 3000, b = 1,0475, x = ?, f(x) = 4348,64</math> <math>3000 \cdot 1,0475^x = 4348,64 \quad   : 3000</math> <math>1,0475^x = 1,4495 \quad   \log</math> <math>x \cdot \log 1,0475 = \log 1,4495 \quad   : \log 1,0475</math> <math>x = 8 \text{ Jahre}</math></p>



### 2.3.2 Wachstum mit der e-Funktion der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

Grundlage dieser Funktion ist die sog. **e-Funktion**, welche die von Leonard Euler im Jahr 1743 publizierte Zahl **e** enthält. Die Zahl e ist ähnlich wie die Kreiszahl Pi eine irrationale Zahl und entspricht ungefähr dem Wert 2,71828...

Man bezeichnet die die e-Funktion auch als **natürliche Exponentialfunktion**.

Die Umrechnung der einfachen Exponentialfunktion in eine e-Funktion erfolgt nach der Formel:

$$f(x) = a \cdot b^x \Leftrightarrow f(x) = a \cdot e^{\ln(b) \cdot x} \quad (\ln \text{ ist der Logarithmus zur Basis } e)$$

#### Welche Bedeutung hat die Zahl e?

Die Entdeckung der Zahl e basiert auf der Untersuchung der folgenden Fragestellung: Wenn man einen in der Natur vorkommenden Wachstums- oder Zerfallsprozess mit der einfachen Exponentialfunktion beschreibt, so geht es beispielsweise darum, dass ein vorhandener Bestand an Bakterien pro Jahr um 20 % wächst. Danach gäbe es bei einem Ausgangswert von 100 nach einem Jahr 120. In Wahrheit vermehrt sich der Bakterienbestand aber nicht schlagartig am Ende des Jahres sondern das Wachstum geschieht ständig. Man spricht in diesem Fall von **natürlichem Wachstum**. Auf ähnliche Weise zerfallen radioaktive Isotope in einem kontinuierlichen Prozess und nicht nur jeweils am Ende einer Zeitperiode.

Wie wirkt sich nun dieser ständige Prozess auf die Entwicklung der Werte der Exponentialfunktion aus? Dazu ein Beispiel:

Die Verzinsung von Kapital erfolgt jeweils am Jahresende. Wenn man 100 € zu 10 % anlegt, so hat man am Ende des Jahres 110 €. Geht man nun davon aus, dass das Kapital zweimal im Jahr verzinst wird, so erhält man bereits 110,25 €. Nach einem halben Jahr wird der halbe Zinssatz berechnet, so dass man 105 € erhält. Dieser erhöhte Betrag wird dann wieder für ein halbes Jahr mit 5 % verzinst, so dass man am Ende des 2. Halbjahres 110,25 € hat.

Jetzt könnte man auf die Idee kommen, diesen Vorgang weiter zu betreiben indem man vierteljährlich oder gar monatlich verzinst. Bei monatlicher Verzinsung käme man schon auf einen Betrag von 110,47 €  $(= 100 \cdot (1 + \frac{10}{100 \cdot 12})^{12})$ .

Erhöht man die Anzahl der Verzinsungen pro Jahr immer weiter, dann nähert man sich schon dem ständigen oder natürlichen Wachstum an. Würde dann auch der Endbetrag, der sich nach einem Jahr ergibt ins Unendliche wachsen?

Eine weitere Rechnung für eine **tägliche** Verzinsung zeigt, dass dem nicht so ist:

Es ergibt sich:  $100 \cdot (1 + \frac{10}{365 \cdot 100})^{365} = 110,516$ . Der Betrag wird zwar höher, er scheint aber langsamer zu wachsen.

Tatsächlich zeigt sich, dass auch, wenn die Anzahl der Verzinsungen ins Unendliche gesteigert wird, der Endbetrag niemals größer als 110,52 € wird. Trotz weiter steigender Endbeträge, nähert sich dieser Wert einer Grenze an, die nicht überschritten wird. Die Zuwächse werden immer kleiner.

Leonard Euler hat gezeigt, dass alle Prozesse, die natürlichem Wachstum unterliegen sich von den einfachen exponentiellen Wachstumsprozessen durch eine Zahl unterschieden werden können, die etwa den Wert 2,718... hat. Dieses ist die Zahl **e** oder die **Eulersche Zahl**.

Das Ergebnis unseres Beispiels mit einer stetigen Verzinsung kann durch die folgende Rechnung beschrieben werden:  $f(x) = 100 \cdot e^{0,1} = 110,517$ . Dabei entspricht die Zahl 0,1 im Exponenten dem Zinssatz von 10 %  $(10/100 = 0,1)$ .

#### Verwendung der e-Funktion als Exponentialfunktion:

Sehr häufig findet man folgende Schreibweise:  $f(t) = a \cdot e^{i \cdot t}$

Wobei **a** = **f(0)**, d. h. der Anfangswert, **t** die Zeit und **i** der Wachstums- bzw. Zerfallsfaktor.

Bei einem Wachstum ist der Wert von **i** **positiv**, bei einem Zerfall ist **i** **negativ**.

Vergleicht man die e-Funktion mit der einfachen Exponentialfunktion, so erhält man bei der e-Funktion dieselben Ergebnisse, wenn man für den Wert von i den natürlichen Logarithmus von b  $(\ln(b))$  einsetzt.

$$f(x) = a \cdot b^x \Leftrightarrow f(x) = a \cdot e^{\ln(b) \cdot x}$$

Leitet man allerdings aus der einfachen Exponentialfunktion eine natürliche Wachstumsfunktion ab, bei der das stetige Wachstum berücksichtigt wird, so ergibt sich der Wachstumsfaktor i aus  $b - 1$ .



<b>Beispiel:</b> Eine Alge bedeckt eine Fläche von 100 m <sup>2</sup> eines Sees und breitet sich um 25 % pro Jahr aus. Welche Fläche wird nach 5 Jahren bedeckt?	
Lösung mit der einfachen Exponentialfunktion	$100 \cdot 1,25^5 = 305,18m^2$
Lösung mit der e-Funktion	$100 \cdot e^{\ln(1,25) \cdot 5} = 305,18m^2$
Berücksichtigung des natürlichen Wachstums	$100 \cdot e^{0,25 \cdot 5} = 349,03m^2$

## 2.4 Umgang mit der e-Funktion (Verschiedene Beispiele)

<p><b>Beispiel 1:</b> Das Bevölkerungswachstum eines Landes ergibt sich aus folgender Tabelle:</p> <table border="1" data-bbox="188 685 778 748"> <tr> <td>Jahr</td> <td>2000</td> <td>2004</td> <td>2008</td> <td>2012</td> </tr> <tr> <td>Mio</td> <td>15,0</td> <td>16,62</td> <td>18,42</td> <td>20,41</td> </tr> </table> <p>Wie heißt die Funktionsgleichung, wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht?</p>	Jahr	2000	2004	2008	2012	Mio	15,0	16,62	18,42	20,41	<p>Lösung: a) mit der einfachen Exponentialfunktion</p> $15 \cdot b^{12} = 20,41 \rightarrow b = 1,026$ $f(x) = 15 \cdot 1,026^x$ <p>(jährliches Wachstum von 2,6 %)</p> <p>b) mit der e-Funktion</p> $15 \cdot e^{i \cdot 12} = 20,41 \quad   : 15$ $e^{i \cdot 12} = 1,3606 \quad   \ln$ $i \cdot 12 = \ln(1,3606) \quad   : 12$ $i = 0,02566$ $f(t) = 15 \cdot e^{0,02566 \cdot t}$
Jahr	2000	2004	2008	2012							
Mio	15,0	16,62	18,42	20,41							
<p><b>Beispiel 2:</b> Das radioaktive Isotop Jod 131 zerfällt mit der Zerfallskonstante <math>i = -0,0866</math> pro Tag. Wie viel der Ausgangsmenge von 100 mg ist nach 14 Tagen noch vorhanden?</p>	<p>Lösung:</p> $100 \cdot e^{-0,0866 \cdot 14} = 29,75mg$										
<p><b>Beispiel 3:</b> Ein radioaktives Isotop hat eine Halbwertszeit von 13 Jahren. Wie lange dauert es, bis nur noch 1 % der Strahlung vorhanden ist?</p>	<p>Lösung: Die Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden.</p> <p>Über die Berechnung der Zerfallskonstante pro Jahr</p> $100 \cdot e^{i \cdot 13} = 50 \rightarrow i = -0,0533$ $100 \cdot e^{-0,0533 \cdot t} = 1 \quad   \ln$ $-0,0533 \cdot t = \ln(0,01) \rightarrow t = \mathbf{86,4 \text{ Jahre}}$ <p>Mit dem Zerfallsfaktor 0,5 und der einfachen Exponentialfunktion</p> $100 \cdot 0,5^x = 1$ $x = 6,6438 \text{ (Einheiten à 13 Jahre)}$ $t = 6,6438 \cdot 13 = \mathbf{86,4 \text{ Jahre}}$ <p>Diese Rechnung funktioniert mit der e-Funktion so nicht, da hier der Einfluss des stetigen Wachstums nicht berücksichtigt wird.</p>										



### 3. Verschiedene Wachstumsformen

In der Realität können außer dem exponentiellen Wachstum noch andere Wachstumsmodelle beobachtet werden, die mit Hilfe der e-Funktion dargestellt werden können. Unbeschränktes Wachstum, bei dem die Zuwachsraten immer größer werden, unterliegt in der Realität meist natürlichen Grenzen, die diesem Prozess Einhalt gebieten. So kann die Population einer Tierart ebenso wenig unbegrenzt steigen wie sich eine Grippeepidemie unbegrenzt auf die gesamte Menschheit ausdehnen wird.

Dabei werden folgende Formen betrachtet:

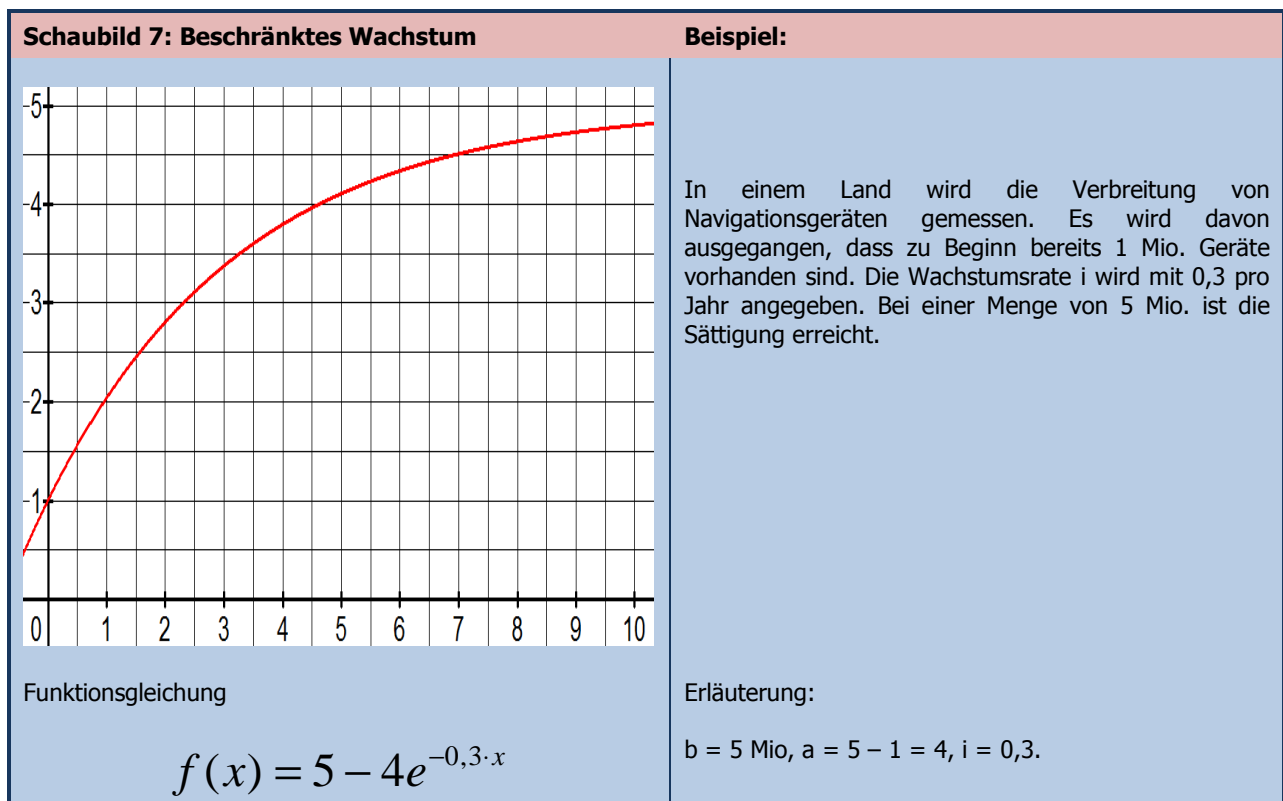
- Beschränktes Wachstum und beschränkter Zerfall
- Logistisches Wachstum
- Vergiftetes Wachstum

#### 3.1 Beschränktes Wachstum und beschränkter Zerfall

##### 3.1.1 Beschränktes Wachstum

Das Modell des beschränkten Wachstums geht davon aus, dass ein degressiver Wachstumsverlauf vorliegt, der sich einem Grenzwert nähert.

Es gilt folgende Formel:  $f(x) = b - ae^{-i \cdot x}$  wobei **b** der Grenzwert und **a** = b - f(0)

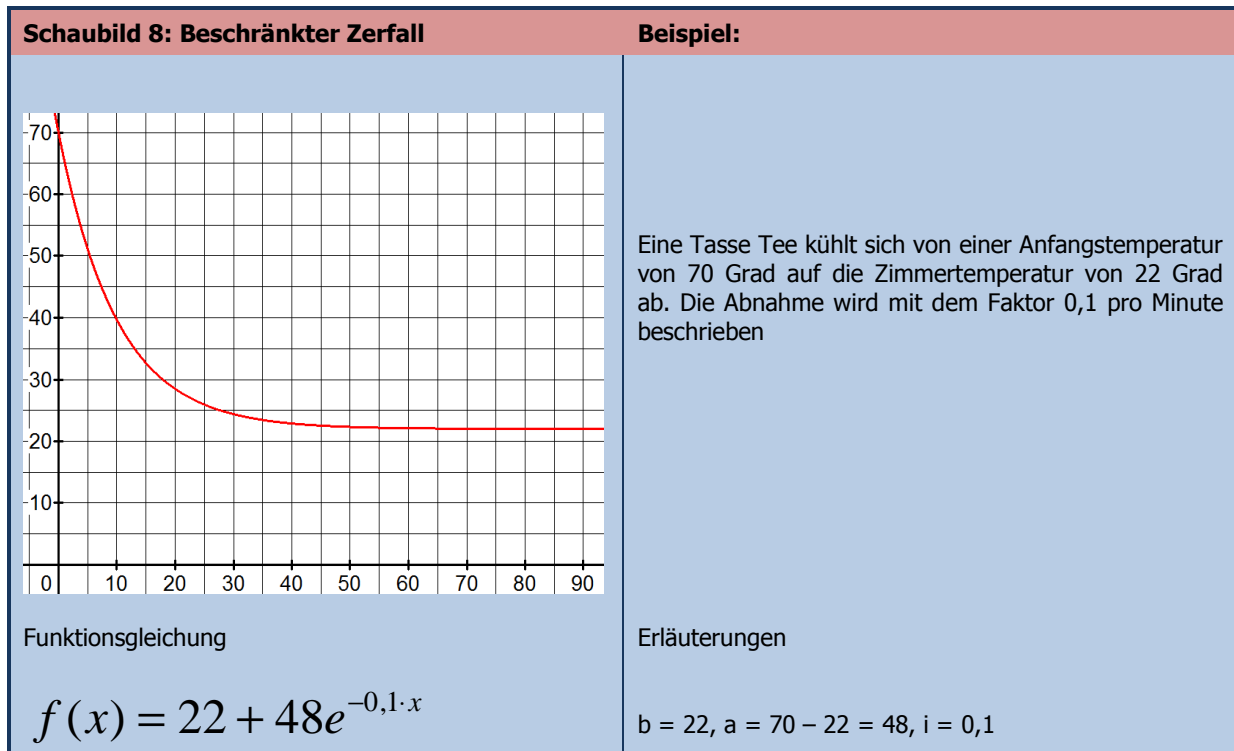




### 3.1.2 Beschränkter Zerfall

Das Modell des beschränkten Zerfalls geht davon aus, dass ein degressiver Zerfallsverlauf vorliegt, der sich einem Grenzwert nähert.

Es gilt folgende Formel:  $f(x) = b + ae^{-i \cdot x}$  wobei **b** der Grenzwert und **a** = f(0) – b



### 3.1.3 Berechnen des Wachstumsfaktors i

In den obigen Beispielen wurde der Faktor i als bekannt vorausgesetzt. Wie aber kann man diesen selber bestimmen? Dazu benötigt man nicht nur den Grenzwert und den Anfangswert, sondern auch noch einen zusätzlichen Messwert. Dieser wird dann zusammen mit allen anderen bekannten Größen in die Formel eingesetzt und diese nach i aufgelöst.

Beispiel	Lösung
<p>Für eine 80 Grad heiße Sauna wird ein Eimer Wasser mit einer Temperatur von 20 Grad aus Aufgusseimer bereitgestellt. Nach 20 Minuten beträgt die Temperatur des Wassers in dem Eimer 35 Grad. Wie lautet die Funktion für das beschränkte Wachstum?</p>	<p>Wir kennen folgende Größen b = 80, a = 60 (80 – 20) und f(20) = 35. Es wird eingesetzt.</p> $80 - 60e^{-i \cdot 20} = 35 \quad   -80 \text{ und }   :(-60)$ $e^{-i \cdot 20} = 0,75 \quad   \ln$ $-i \cdot 20 = \ln(0,75) \quad   : (-20)$ <p><b>i = 0,01438</b></p>

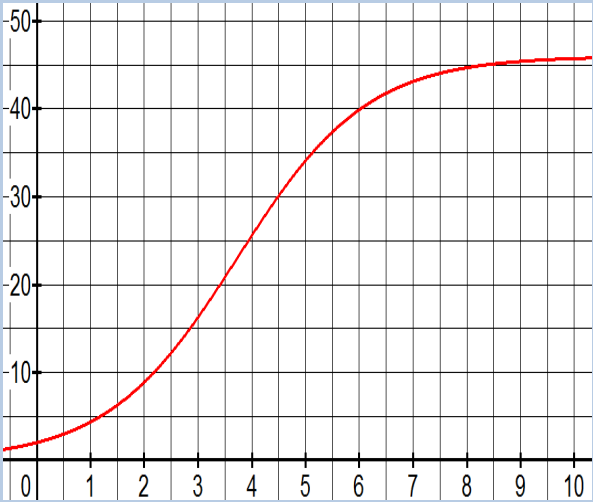


### 3.2 Logistisches Wachstum

In diesem Modell wird das exponentielle Wachstum mit dem beschränkten Wachstum kombiniert. Zunächst beginnt eine Wachstumsphase, welche zu einem zunehmenden Wachstum führt, dann beginnt das Wachstum abzunehmen und nähert sich einem Grenzwert.

Diese Art des Wachstums liegt bei vielen Populationsentwicklungen vor.

Es gilt folgende Formel:  $f(x) = \frac{a \cdot b}{a + (b - a)e^{-i \cdot b \cdot x}}$  wobei **b** der Grenzwert und **a** = f(0) und f(0) >= 1 ist

Schaubild 9: Logistisches Wachstum	Beispiel																
 <p>Funktionsgleichung</p> $f(x) = \frac{2 \cdot 46}{2 + (46 - 2)e^{-0,0178 \cdot 46 \cdot x}}$	<p>In einem begrenztem Lebensraum leben 2 Lebewesen, die sich nach Ablauf einer Zeiteinheit teilen. Die so Entstandenen teilen sich wieder nach einer Zeiteinheit usw.</p> <p>Nach einer Weile wird der Lebensraum knapp, so dass sich nicht mehr alle Lebewesen teilen. Im weiteren Zeitablauf teilen sich immer weniger, so dass die Population immer langsamer wächst und irgendwann eine Grenze erreicht hat.</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>Zeit</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Anzahl</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>26</td> <td>34</td> <td>40</td> </tr> </table> <p>Nehmen wir an, die Grenze liege bei einer Anzahl von 46.</p> <p>Erläuterungen</p> <p>a = 2, b = 46, der Faktor i ist entweder bekannt oder kann durch Einsetzen eines Funktionswertes in die Formel errechnet werden.</p>	Zeit	0	1	2	3	4	5	6	Anzahl	2	4	8	16	26	34	40
Zeit	0	1	2	3	4	5	6										
Anzahl	2	4	8	16	26	34	40										



### 3.2.1 Allgemeine Berechnung des Faktors i

In 3.1.3 wurde gezeigt, wie man den Wachstums- bzw. Zerfallsfaktor einer beschränkten Exponentialfunktion durch Einsetzen eines Funktionswertes berechnen kann. Dieses ist auf die gleiche Art auch für das logistische Wachstum möglich. In einer etwas komplexen Rechnung soll dies auf allgemeine Art gezeigt werden, damit man eine Formel für i erhält.

Umstellen der Gleichung des logistischen Wachstums nach i	
<p>Ausgang ist die folgende Gleichung:</p> $\frac{a \cdot b}{a + (b - a)e^{-i \cdot b \cdot x}} = f(x)$	<p>Die Werte für x und f(x) sind bekannt</p>
$a + (b - a)e^{-i \cdot b \cdot x} = \frac{a \cdot b}{f(x)}$	<p>  : (a · b) und Kehrwert</p>
$(b - a)e^{-i \cdot b \cdot x} = \frac{a \cdot b}{f(x)} - a$	<p>  - a</p>
$(b - a)e^{-i \cdot b \cdot x} = a \left( \frac{b}{f(x)} - 1 \right)$	<p>  a Ausklammern</p>
$e^{-i \cdot b \cdot x} = \frac{a}{b - a} \left( \frac{b}{f(x)} - 1 \right)$	<p>  : (b - a)</p>
$-i \cdot b \cdot x = \ln \left[ \frac{a}{b - a} \left( \frac{b}{f(x)} - 1 \right) \right]$	<p>  Logarithmieren</p>
$i = - \frac{\ln \left[ \frac{a}{b - a} \left( \frac{b}{f(x)} - 1 \right) \right]}{b \cdot x}$	<p>  : (-b · x)</p>
	<p>Dies ist die gesuchte allgemeine Formel für den Faktor i, der den Kurvenverlauf der logistischen Exponentialfunktion beschreibt</p>

#### Beispiel

Die Bevölkerung eines Landes beträgt zu Beginn 10 Mio. Sie wächst zunächst exponentiell und dann degressiv bis zu einem Höchstwert von 25 Mio. Nach 10 Jahren beträgt die Anzahl 15 Mio.

Es soll die Gleichung für das logistische Wachstum bestimmt werden und der Graph gezeichnet werden.

#### Schaubild 10

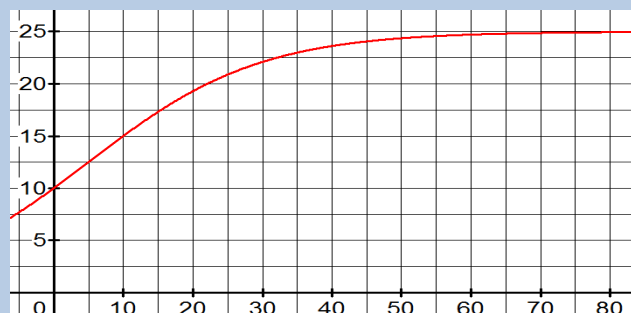
Es wird in obige Formel eingesetzt

$$i = - \frac{\ln \left[ \frac{10}{25 - 10} \left( \frac{25}{15} - 1 \right) \right]}{25 \cdot 10}$$

$$i = -0,0032437$$

Die Funktionsgleichung lautet damit:

$$f(x) = \frac{10 \cdot 25}{10 + (25 - 10)e^{-0,0032437 \cdot 25 \cdot x}}$$



### 3.2 Vergiftetes Wachstum

Vergiftetes Wachstum liegt vor, wenn eine Entwicklung zunächst progressiv exponentiell verläuft, dann in ein degressives Wachstum übergeht, um nach Überschreiten eines Maximalbestandes in einen negativen Prozess überzugehen, der die Entwicklung umkehrt, und schließlich zum Aussterben des Bestandes zu führt.

Es gilt folgende Formel:  $f(x) = a \cdot e^{g \cdot x - 0,5 \cdot s \cdot x^2}$

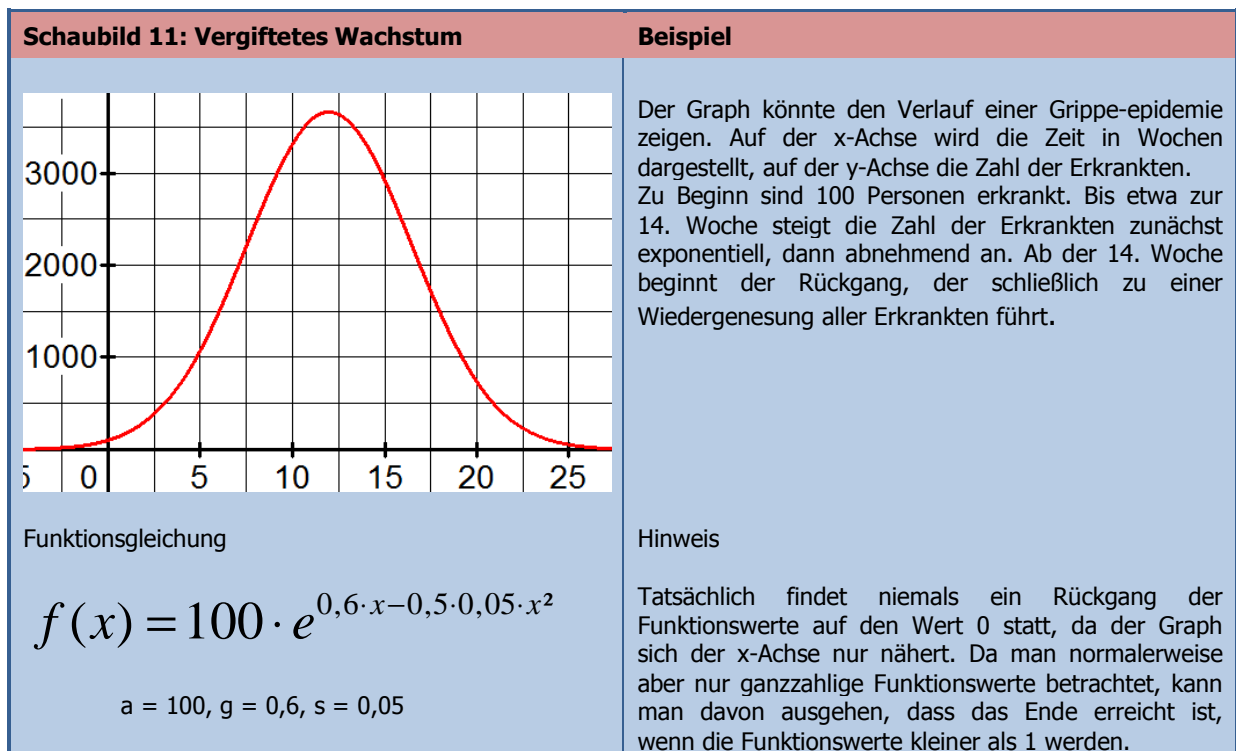
Die einzelnen Parameter haben folgende Bedeutung:

a = Anfangswert

g = die Wachstums- oder Geburtenrate

s = die Sterbe- oder Vergiftungsrate

Ein typisches Beispiel für vergiftetes Wachstum ist der Verlauf einer Epidemie. Während sich die Anzahl der Erkrankten zu Beginn exponentiell ausweitet, kommt es nach einiger Zeit zu einem Sinken der Neuerkrankten und schließlich zu einem Abflauen der Epidemie.



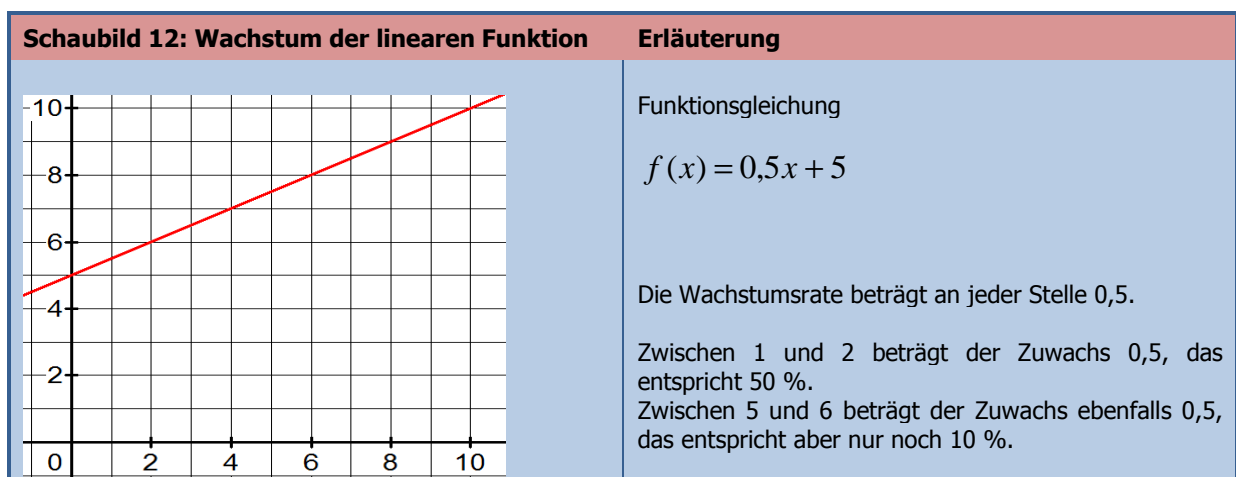
## 4. Wachstumsraten (momentane Änderungsrate)

Die momentane Änderungsrate gibt die Wachstumsgeschwindigkeit einer Wachstumsfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt an. Dies entspricht der Steigung des Graphen der Exponentialfunktion an einer bestimmten Stelle. In der Differentialrechnung wird diese durch die 1. Ableitung ausgedrückt. Graphisch kann man die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Tangente an der gesuchten Stelle des Graphen darstellen. Die Steigung der Tangente entspricht dann der momentanen Änderungsrate.

### 4.1. Wachstumsrate bei linearem Wachstum

Bei linearem Wachstum ist die Wachstumsrate stets konstant. Pro Zeiteinheit wachsen (oder zerfallen) die Werte jeweils um den gleichen Betrag.

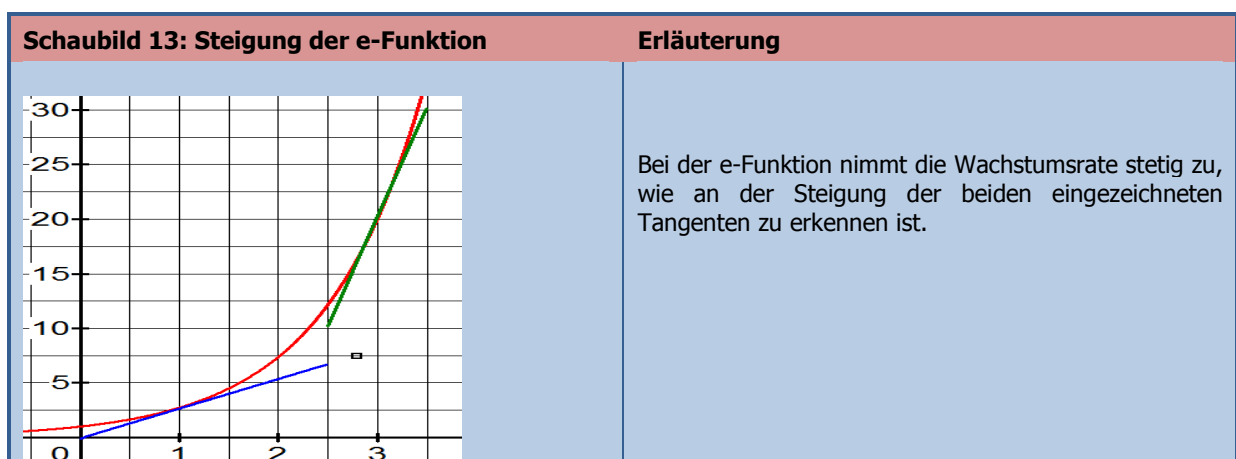
Es ist zu beachten, dass allerdings die prozentuale Veränderung aufgrund des jeweils veränderten Grundwertes entweder steigt oder sinkt (bei Zerfall).



### 4.2 Wachstumsrate der einfachen e-Funktion

Bei der Untersuchung der Wachstumsraten von Exponentialfunktionen konzentrieren wir uns auf die e-Funktionen, weil diese sich besonders für die Untersuchung von Wachstumsveränderungen eignen.

Wie bereits dargestellt, wird die Wachstumsrate durch die 1. Ableitung der Funktion ausgedrückt. Diese entspricht der Steigung der Funktion an der Stelle x.



Um die Ableitung der e-Funktion an einer Stelle x zu berechnen, betrachten wir den Grenzwert des Differenzenquotienten für  $h \rightarrow 0$ .

Zwei Punkte haben die Koordinaten  $P_1(x / e^x)$  und  $P_2(x+h / e^{x+h})$ . Dann ergibt sich folgender Rechenweg:

Ableitung der e-Funktion	
$m = \frac{e^{x+h} - e^x}{x+h-h}$	Die Werte für x und f(x) sind bekannt   $e^{x+h}$ zerlegen
$m = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$	- Ausklammern
$m = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$	$e^x$ vor den Bruch ziehen
Mit dem Taschenrechner lässt sich zeigen, dass der Ausdruck $\frac{e^h - 1}{h}$ den Grenzwert 1 hat, wenn $h \rightarrow 0$	
Damit gilt: Die Ableitung von $e^x$ ist wieder $e^x$	

Im Folgenden kann also immer davon ausgegangen werden, dass die Ableitung von  $e^x$  identisch ist mit der Stammfunktion.

### 4.3 Wachstumsrate der natürlichen Exponentialfunktion

Die momentane Änderungsrate der natürlichen Exponentialfunktion  $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$  wird durch die 1. Ableitung ausgedrückt. Da hier der Exponent die ‚innere‘ Funktion darstellt, wird die Ableitung mit der **Kettenregel** durchgeführt.


Dabei gilt der Term  $a \cdot e^{b \cdot x}$  als ‚äußere Funktion‘. Aufgrund der Kettenregel (äußere x innere Ableitung ist  $f'(x) = a \cdot b \cdot e^{b \cdot x}$  oder auch  $f'(x) = b \cdot f(x)$ )

Beispiel	Lösung
Eine Algenpopulation mit einem Anfangsbestand von 100 vermehrt sich mit einem Wachstumsfaktor von $b = 0,25$ pro Tag. Wie hoch ist die Wachstumsgeschwindigkeit am 5. Tag?	$f(x) = 100 \cdot e^{0,25 \cdot x}$ $f'(x) = 100 \cdot 0,25 e^{0,25 \cdot x} = 25 e^{0,25 \cdot x}$ $f'(5) = 25 \cdot e^{0,25 \cdot 5} = 87,25$ <p>D. h. die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt 5 beträgt ca. 87 Einheiten. Oder: der Graph der Exponentialfunktion hat an der Stelle <math>x = 5</math> den Anstieg 87,25</p>



#### 4.4 Wachstumsrate bei beschränktem Wachstum

Die Ableitung der beschränkten Wachstums-oder Zerfallsfunktion unterscheidet sich nicht von der natürlichen Exponentialfunktion, da die Konstante in der Funktionsgleichung bei der Ableitung wegfällt.

Beispiel	Lösungsweg
<p>Ein beschränkter Zerfallsprozess mit einem Anfangsbestand von 10 und einer Grenze von 2 verläuft nach der Funktionsgleichung</p> $f(x) = 2 + 8 \cdot e^{-0,2 \cdot x}$ <p>Die Zeit wird in Stunden gemessen.</p> <p>Nach Ablauf welcher Zeit ist die Zerfallsrate unter 10 % gesunken?</p> <p><b>Schaubild 14: Verlauf des Graphen</b></p> 	<p>Die Ableitung der Funktion ist</p> $f'(x) = -1,6 \cdot e^{-0,2 \cdot x}$ $f'(x) = -0,1 \text{ da die Zerfallsrate } 0,1 \text{ sein soll.}$ $-1,6 \cdot e^{-0,2 \cdot x} = -0,1 \quad   : (-1,6)$ $e^{-0,2 \cdot x} = 0,0625 \quad   \ln$ $-0,2x = \ln 0,0625 \quad   : (-0,2)$ <p><b>x = 13,86</b></p> <p>Nach knapp 14 Stunden ist die Zerfallsrate unter 10 % gesunken</p> $f'(x) = -i \cdot a \cdot e^{-i \cdot x}$

#### 4.5 Wachstumsrate bei logistischem Wachstum

Die erste Ableitung der logistischen Wachstumsfunktion  $f(x) = \frac{a \cdot b}{a + (b - a)e^{-i \cdot b \cdot x}}$  lautet:

$$f'(x) = i \cdot b \cdot f(x) - i \cdot (f(x))^2.$$

Das sieht nicht gerade einfach aus. Deshalb ein kleines Beispiel:

Beispiel	Lösungsweg
<p>Die Beschleunigung eines Fahrzeugs wird durch die logistische Funktion <math>f(x) = \frac{400}{1 + 400e^{-0,0012 \cdot 400 \cdot x}}</math> ausgedrückt. Dabei beschleunigt das Fahrzeug zunächst und wird danach allmählich wieder langsamer</p> <p>Berechne die Geschwindigkeit des Fahrzeugs nach 10 Sekunden.</p>	<p>Für x wird der Wert 10 eingesetzt.</p> $\frac{400}{1 + 400e^{-0,0012 \cdot 400 \cdot 10}} = 93,2$ <p>Nach 10 Sekunden hat das Fahrzeug 93,2 m zurückgelegt.</p> <p>Dieser Wert wird in die obige 1. Ableitung eingesetzt. Es ergibt sich:</p> $f'(x) = 0,0012 \cdot 400 \cdot 93,2 - 0,0012 \cdot (93,2)^2$ $= 34,31 \text{ Dies ist der Wert in m pro Sekunde}$



### 4.5.1 Der Wendepunkt der logistischen Wachstumsfunktion

Eine logistische Wachstumsfunktion hat immer einen Wendepunkt, der den Übergang vom progressiven zum degressiven Wachstum darstellt. An dieser Stelle ist die Wachstumsrate am größten (siehe Eigenschaften von Wendepunkten in der Differentialrechnung). Normalerweise findet man den Wendepunkt, indem man die 2. Ableitung bildet und diese gleich 0 setzt. Bei der logistischen Funktion liegt der Wendepunkt allerdings immer an der gleichen Stelle, nämlich bei der Hälfte des Grenzwertes ( $0,5 \cdot b$ ). Mit dieser Information kann man nun entweder den dazugehörigen x-Wert ausrechnen, indem man die Funktionsgleichung der logistischen Funktion nach x auflöst oder das Maß der größten Steigung ermitteln, indem man in die 1. Ableitung einsetzt.

Beispiel	Lösungsweg
<p>Die Entwicklung der Population wird durch die Gleichung <math>f(x) = \frac{3500}{1 + 16,5e^{-0,2x}}</math> ausgedrückt. Der Grenzwert der Population beträgt 3500.</p> <p>Berechne den Zeitpunkt, in dem das Wachstum am größten ist.</p>	<p>Im Wendepunkt muss gelten <math>f(x) = 1750</math>. Daraus folgt: <math>\frac{3500}{1 + 16,5e^{-0,2x}} = 1750</math> mit <math>x = \mathbf{9,36}</math></p> <p>Nach 9,36 Zeiteinheiten ist das Wachstum am größten.</p>





## 5. Lösen von Differentialgleichungen

In einer Differentialgleichung kommen Ableitungen und Funktionen vor. Die Lösung einer Differentialgleichung ist nicht eine Zahl sondern eine Funktion.

Differentialgleichungen beschreiben das Änderungsverhalten eines Bestandes zu einem bestimmten Zeitpunkt  $x$ .

### 5.1 Differentialgleichung bei exponentiellem Wachstum (Zerfall)

In Kapitle 4.3 wurde die Ableitung der Exponentialfunktion mit  $f'(x) = b \cdot f(x)$  beschrieben. Eine Differentialgleichung für die Exponentialfunktion kann folgendermaßen aussehen:

$$f'(x) = b \cdot f(x) \quad \text{wobei gilt: } f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$$

Man erkennt, dass die Wachstumsrate proportional (Faktor  $b$ ) zum jeweiligen Bestand ist.

Mit Hilfe einer Differentialgleichung kann nun beispielsweise die Funktionsgleichung bestimmt werden, wenn der Bestand zu einem Zeitpunkt und die Änderungsrate in diesem Punkt bekannt ist.

Beispiel 1:	Lösungsweg
<p>Gegeben ist die Differentialgleichung</p> $f'(x) = 0,2 \cdot f(x)$ <p>Bestimme die Lösung, wenn außerdem bekannt ist, dass <math>f(10) = 6</math>.</p>	<p>Die Lösung ist die gesuchte Funktion für <math>f(x)</math>.</p> <p>Es muss gelten: <math>f(x) = a \cdot e^{0,2 \cdot x}</math></p> <p>Dies sind zunächst alle Lösungen der Differentialgleichung. Um den Anfangswert <math>a</math> zu finden, müssen die Koordinaten des bekannten Punktes eingesetzt werden. <math>6 = a \cdot e^{0,2 \cdot 10}</math></p> <p>Daraus folgt: <math>a = 6 : e^2 = 0,812</math></p> <p>Lösung: <math>f(x) = 0,812 \cdot e^{0,2 \cdot x}</math></p>

Beispiel 2: (Wachstum)	Lösungsweg
<p>Der Bestand einer Nährlösung wächst exponentiell. Nach 20 Stunden beträgt der Bestand 8222. Die momentane Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt beträgt 1160.</p> <p>Nach wie vielen Stunden ist der Bestand auf 1 Mio. angewachsen?</p>	<p>Gegeben: <math>f'(x) = 1160</math> und <math>f(20) = 8222</math>.</p> <p>Ansatz: <math>1160 = b \cdot 8222 \rightarrow b = 0,141</math></p> <p>Dann gilt: <math>a \cdot e^{0,141 \cdot 20} = 8222 \rightarrow a = 490</math></p> $f(x) = 490 \cdot e^{0,141 \cdot x}$ $490 \cdot e^{0,141 \cdot x} = 1000000$ $e^{0,141 \cdot x} = 2040,8 \quad   \ln$ <p><math>x = 54</math> Nach ca. 54 Stunden</p>

Beispiel 3. (Zerfall)	Lösungsweg
<p>Der Zerfall eines chemischen Elements verläuft exponentiell. Nach 5 Tagen beträgt der Bestand 3276,8 EH. Die momentane Zerfallsrate beträgt 731,2.</p> <p>Bestimme die Funktionsgleichung und den Ausgangswert.</p>	<p>Gegeben: <math>f'(x) = -731,1</math> und <math>f(5) = 3276,8</math></p> <p>Ansatz: <math>-731,1 = b \cdot 3276,8 \rightarrow b = -0,2231</math></p> <p>Dann gilt <math>a \cdot e^{-0,2231 \cdot 5} = 3276,8 \rightarrow a = 10\ 000</math></p> <p>Der Anfangswert beträgt 10 000 und die Funktionsgleichung lautet <math>f(x) = 10000 \cdot e^{-0,2231 \cdot x}</math></p>



## 5.2 Differentialgleichung bei beschränktem Wachstum (Zerfall)

In Kapitle 4.4 wurde die Ableitung der Exponentialfunktion mit  $f'(x) = b \cdot f(x)$  beschrieben. Die Differentialgleichung für das beschränkte Wachstum lautet:

$$\boxed{f'(x) = k \cdot (b - f(x))} \quad \text{wobei gilt: } f(x) = b - a \cdot e^{-k \cdot x}$$

Die Differentialgleichung für den beschränkten Zerfall lautet ebenso wie oben:

$$\boxed{f'(x) = k \cdot (b - f(x))} \quad \text{wobei gilt: } f(x) = b + a \cdot e^{-k \cdot x}$$

$b$  = Sättigungsgrenze und  $a = b - f(0)$

Der Term  $b - f(x)$  wird als Sättigungsmanko bezeichnet.

Das Zustandekommen dieser Differentialgleichung soll anhand eines Beispiels gezeigt werden:

Beispiel 1:	Lösungsweg
<p>Angenommen, ein Bevölkerungswachstum wird durch die beschränkte Wachstumsfunktion <math>f(x) = 10 - 6 \cdot e^{-0,05 \cdot x}</math> dargestellt.</p> <p>Dann lautet die 1. Ableitung:</p> $f'(x) = -0,05 \cdot (-6) \cdot e^{-0,05 \cdot x}$ <p>Wie lautet die Differentialgleichung, die einen Zusammenhang zwischen <math>f(x)</math> und <math>f'(x)</math> darstellt?</p>	<p>Wenn gilt: <math>f(x) = 10 - 6 \cdot e^{-0,05 \cdot x}</math>, dann gilt auch: <math>10 - f(x) = 6 \cdot e^{-0,05 \cdot x}</math></p> <p>Somit gilt auch:</p> $f'(x) = 0,05 \cdot (10 - f(x))$ <p>oder allgemein:</p> $f'(x) = k \cdot (b - f(x))$

Beispiel 2: (Wachstum)	Lösungsweg
<p>Ein Glas Wasser wird mit einer Temperatur von 5 Grad aus dem Kühlschrank entnommen. Nach 20 Minuten hat es sich auf 18 Grad aufgewärmt. Die Zimmertemperatur beträgt 22 Grad.</p> <p>Stelle die Differentialgleichung der beschränkten Wachstumsfunktion auf.</p> <p>Berechne die momentane Erwärmungsrate nach 20 Minuten.</p>	<p>Es wird folgende Gleichung aufgestellt:</p> $22 - 17 \cdot e^{-k \cdot 20} = 18$ <p>Nach Umstellen ist <math>k = 0,0723459</math></p> $f(x) = 22 - 17 \cdot e^{-0,0723459 \cdot x} \quad \text{oder}$ $22 - f(x) = 17 \cdot e^{-0,0723459 \cdot x}$ <p>Nach obiger Formel ist dann:</p> $f'(x) = 0,0723459 \cdot (22 - f(x))$ $f'(20) = 0,0723459 \cdot (22 - 18) = 0,289 \text{ Grad}$



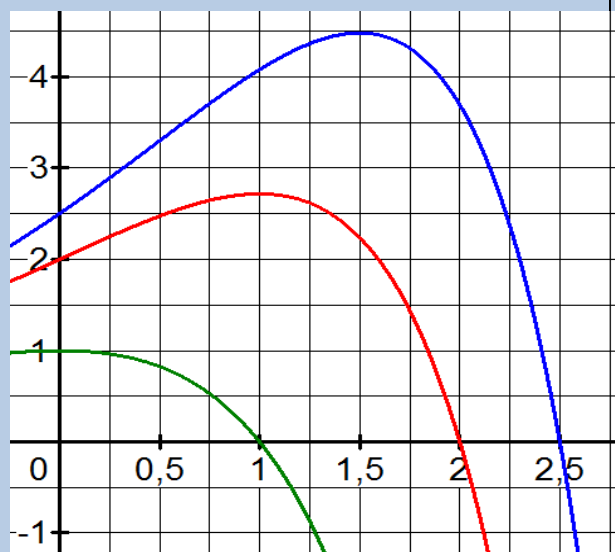
Beispiel 3: (Zerfall)	Lösungsweg
<p>Ein beschränkter Zerfallsprozess weist an der Stelle 10 eine momentane Änderungsrate von -0,2165 auf.</p> <p>Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn das Sättigungsmanko zu diesem Zeitpunkt bei -1,0826 und die Sättigungsgrenze bei 2 liegt?</p>	<p>Es gilt:</p> $-0,2165 = i(-1,0826) \rightarrow i = 0,2$ <p>Damit gilt:</p> $\begin{aligned} -0,2165 &= 0,2(-a \cdot e^{-0,2 \cdot 10}) \\ -0,2165 &= -0,2a \cdot e^{-2} &&   : (-0,2) \\ 1,0825 &= a \cdot e^{-2} &&   \ln \\ \ln 1,0825 &= \ln a - 2 &&   + 2 \\ 2,0792 &= \ln a && \rightarrow a = 8 \end{aligned}$ <p>Damit ist <math>f(x) = 2 + 8 \cdot e^{-0,2 \cdot x}</math></p>

## 6. Spezielle Aufgabenstellungen

Die beiden folgenden Aufgaben sind Teile von Abituraufgaben für Leistungskurse in Hessen.

Schaubild 15	Aufgabe 1: Medikamentenkonzentration
	<p>Durch die Funktion <math>f(x) = 20x \cdot e^{-0,5 \cdot x}</math> wird die Konzentration eines Medikamentes im Blut eines Patienten beschrieben (<math>x</math> in Stunden, <math>f(x)</math> in mg pro Liter).</p> <p>Es sind folgende Aufgaben zu lösen:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Wann erreicht die Konzentration den höchsten Wert?</li> <li>2. Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut?</li> <li>3. Wie groß ist zum Zeitpunkt 4 die momentane Änderungsrate?</li> <li>4. Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden?</li> </ol>
<p><b>Lösungsweg</b></p> <p>1. Ableitung mit der Produktregel und Kettenregel <span style="float: right;"><math>f'(x) = u'v + u'v</math></span></p> $u = 20x \quad u' = 20, \quad v = e^{-0,5x} \quad v' = -0,5e^{-0,5x}$ $f'(x) = 20x(-0,5)e^{-0,5x} + 20e^{-0,5x} \rightarrow f'(x) = e^{-0,5x}(20 - 10x)$ $f''(x) = e^{-0,5x}(-20 + 5x)$ $e^{-0,5x}(20 - 10x) = 0 \rightarrow \text{gilt für } x = 2 \text{ nach Satz vom Nullprodukt}$ $f''(2) = -22 \text{ also Maximum bei } (2/14,715)$ <p>2. <math>f''(x) = 0 \rightarrow x = 4</math>, nach dem Satz vom Nullprodukt</p> <p>3. <math>f'(4) = -2,706</math></p> <p>4. Es muss die Fläche unter der Kurve zwischen 0 und 12 berechnet werden. Das Integral wird mit Hilfe der <b>partiellen Integration</b> gebildet:</p> $\int_0^{12} u \cdot v' = [u \cdot v]_0^{12} - \int_0^{12} u' \cdot v$ $\int_0^{12} 20x e^{-0,5x} = \left[ 20x \cdot \frac{1}{-0,5} \cdot e^{-0,5x} \right]_0^{12} - \int_0^{12} -40e^{-0,5x}$ $\left[ -40x e^{-0,5x} \right]_0^{12} - \left[ -80e^{-0,5x} \right]_0^{12} = -560e^{-6} + 80 = 6,55$	





Durch die Funktion  $f(x) = (k - x) \cdot e^x$  wird eine Funktionenschar beschrieben.

Es sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. Untersuchen Sie Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte
2. Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve aller Hochpunkte der Funktionenschar.
3. Zeigen Sie, dass sich alle Tangenten, die im jeweiligen Schnittpunkt mit der y-Achse an die Graphen angelegt werden, sich in einem Punkt schneiden.
4. Berechnen Sie die Fläche, die von der Funktion mit  $k = 1$  im 2. Quadranten eingeschlossen wird.

### Lösungsweg

1. Ableitung mit der Produktregel und Kettenregel

$$f'(x) = u'v + u'v$$

$$u = k - x \quad u' = -1 \quad v = e^x \quad v' = e^x$$

$$f'(x) = (k - x)e^x - e^x = e^x(k - x - 1) \quad \text{Die erste Ableitung ist also selbst eine Kurve der Schar}$$

$$f''(x) = e^x(k - x - 2), \quad f'''(x) = e^x(k - x - 3) \quad \text{usw. für weitere Ableitungen}$$

$$\text{Nullstellen: } (k - x)e^x = 0 \quad \rightarrow x = k \quad N(k/0)$$

$$\text{Extremwerte: } e^x(k - x - 1) = 0 \quad \rightarrow x = k - 1 \quad f''(k-1) < 0 \quad \text{HP}(k-1/e^x)$$

$$\text{Wendepunkt: } e^x(k - x - 2) = 0 \quad \rightarrow x = k - 2 \quad f'''(k-2) \text{ nicht } 0 \quad \text{WP}(k-2/2e^x)$$

2. Hochpunkt nach  $k$  auflösen:  $k = x + 1$

Einsetzen in Funktionsgleichung

$$f(x) = (x + 1 - x)e^x = e^x \quad (\text{Gleichung der Ortskurve})$$

3. Ableitung im Punkt 0  $f'(0) = e^0(k - 0 - 1) = k - 1$

$$\text{Funktionswert } f(0) = (k - 0)e^0 = k$$

$$t(x) = mx + b \quad \rightarrow (k - 1) \cdot 0 + b \rightarrow k = b$$

$$t(x) = (k - 1)x + k$$

Um zu prüfen, ob diese Tangenten sich für alle Werte von  $k$  schneiden, kann man dies für zwei Werte von  $k$  untersuchen indem man die Tangentenfunktionen gleich setzt.

$$\text{Z. B. } k_1 = k \quad \text{und } k_2 = k + 1$$

$$(k - 1)x + k = (k + 1 - 1)x + k + 1 \quad \rightarrow kx - x + k = kx + k + 1 \quad \rightarrow x = -1$$

Da in der Lösung  $k$  nicht vorkommt, gilt diese Lösung für alle  $k$

$$t(-1) = (k - 1)(-1) + k = -k + 1 + k = 1$$

Der gemeinsame Schnittpunkt aller Tangenten in  $x = 0$  liegt also bei  $(-1 / 1)$

4. Für  $k = 1$  gilt  $f(x) = (1 - x)e^x$  Damit ist die Stammfunktion  $F(x) = (2 - x)e^x$

Die Integrationsgrenze wird durch die Nullstelle bestimmt, die bei  $x = 1$  liegt.

$$\text{Dann gilt: } \int_0^1 (1 - x)e^x = [(2 - x)e^x]_0^1 = (2 - 1)e^1 - (2 - 0)e^0 = e - 2 = 0,718$$

**So, das war's. Mehr fällt mir im Moment nicht zu dem Thema ein.**

